248

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

Fondée en 1949 Reconnue par l'État
Homologuée par le Ministère de l'Éducation Nationale
1 Rue Bougainville 75007 PARIS
Tél 551 32 59

Session de 1983
Concours d'admission
Mathématiques
2e épreuve - Durée : 2 heures
Coefficient 2

EXERCICE 1

On considère l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2/2}\,dx$ $n \in \mathbb{N}$

1°) Montrer que cette intégrale est convergente.

2°) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour $n \geq 2$

3°) Calculer I_n lorsque n est impair.

En admettant que $I_0 = \sqrt{2\pi}$, calculer I_n lorsque n est pair

EXERCICE 2

Soient deux suites (U_n) et (V_n) $n \in \mathbb{N}$ définies par

$$\begin{cases} U_n = 3U_{n-1} + 2V_{n-1} \\ V_n = U_{n-1} + 2V_{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 1 \end{cases}$$

Calculer U_n et V_n en fonction de n

EXERCICE 3

Un fumeur a dans sa poche deux boîtes d'allumettes de n allumettes chacune. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il prend au hasard l'une des boîtes

a) Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boîte, l'autre boîte contienne encore x allumettes ? Quelles sont les valeurs possibles de x ?

b) Distrait, il se rend compte qu'une boîte est vide, non pas lorsqu'il prend la dernière allumette de la boîte, mais lorsque, cherchant une allumette, il prend une boîte et constate qu'elle est vide.
Quelle est la probabilité que, lorsqu'il constate ainsi pour la première fois qu'une boîte est vide, l'autre contienne encore x allumettes ? Quelles sont les valeurs possibles de x ?

c) Les allumettes des deux boîtes sont discernables (par exemple, elles sont de deux couleurs différentes).
Le fumeur vide dans sa poche les 2n allumettes et il en prend une chaque fois qu'il désire fumer.
Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette de la couleur épuisée en premier, il reste encore x allumettes de l'autre couleur ?

d) Dans chacun des trois cas ci-dessus, calculer les probabilités attachées aux diverses valeurs de x quand n = 3